Magali HERSANT
Université de Nantes

Apprendre des mathématiques en problématisant : produire de façon raisonnée une solution d'un problème ou (non exclusif) identifier un principe du domaine ?

La recherche - résolution d'un problème de mathématiques met en jeu deux types d'articulation de connaissances : (a) articulation de connaissances anciennes et nouvelles ; (b) articulation de connaissances et savoirs de type résultats intermédiaires, théorèmes ou algorithmes… et de connaissances et savoirs sur le domaine (en géométrie, il faut faire…).
Les travaux sur les situations-problèmes (Brousseau, 1998 ; Douady, 1987) ont permis d'explorer largement le type (a) pour l'apprentissage de savoirs curriculaires. Les travaux sur le problème-ouvert (Arsac et Mante,1991) ont renseigné la question des apprentissages de certains principes du domaine (démarche expérimentale, preuve) mais peu de travaux portent sur l'articulation du second type (b).
Nous proposons dans cette communication d'expliciter les apprentissages mathématiques en jeu à travers deux situations construites pour amener les élèves à problématiser puis de discuter les articulations de savoirs qu'elles mettent au travail et les apprentissages mathématiques qu'elles permettent.
Le premier exemple concerne l'apprentissage au cycle 3 de premiers savoirs sur la preuve (Hersant, 2010). Il s'agit d'une séquence forcée (Orange, 2010) construite pour invalider un théorème-en-acte, erroné, largement répandu chez les élèves de la fin de l'école élémentaire et relevant de l'empirisme naïf : « ce n'est pas possible car je n'ai pas réussi ». Plusieurs problèmes d'optimisation discrète sont proposés aux élèves. Pour chacun d'eux, la recherche du problème conduit à une exploration des possibles qui génère la production de solutions possibles (« on peut faire *p* parce que j'ai réussi à le faire ») mais non optimales, puis le plus souvent au début de la séquence au moins à des preuves d' impossibilités relevant de l'empirisme naïf, et enfin à la production de preuves acceptables d'impossibles. Ces différents éléments s'organisent ensuite en la production raisonnée d'une solution : « on peut faire *n* parce que j'ai réussi à le faire ; jamais personne ne pourra faire *n+1* parce que… ; donc la solution est *n* ». La solution de chacun des problèmes résolus ne constitue pas, en soi, un enjeu d'apprentissage (il n'y a aucun intérêt pour la scolarité future des élèves à savoir que sur les intersections d'une grille de 5 lignes 5 colonnes on peut placer au plus 10 points sans en aligner 3 !). Nous souhaitons que les élèves apprennent au cours de cette séquence qu'en mathématiques, contrairement à ce que l'on fait au quotidien, on ne peut pas affirmer que quelque chose est impossible juste parce qu'on n'a pas réussi. Nous visons donc des apprentissages sur un principe mathématique en général (exhiber un cas permet de prouver le possible mais pour montrer un impossible il faut effectuer un raisonnement) qui correspond à une évolution du registre explicatif des élèves, d'une conception anïve et quotidienne de l'impossible vers une conception scientifique de l'impossible. Avec les élèves nous avons institutionnalisé ce principe, seul objectif de la séquence pour nous, notamment en reprenant en conclusion de chacun des problèmes le même type de texte du savoir. Les élèves ont pu aussi être sensibles au cours de la séquence, comme le montrent certaines de leur réaction, à un autre principe relatif à l'optimisation discrète : pour chercher ces problèmes, et les problèmes d'optimisation discrète en général, dans une première phase d'énumération on cherche à obtenir le meilleur résultat possible, puis lorsqu'on bute, on arrête cette recherche de possible et on cherche à trouver des arguments pour des impossibles, ce qu'on appelle des courts-circuits, de façon à encadrer petit à petit le résultat. Cette méthode classique utilisée en optimisation discrète constitue un principe, pour ce domaine des mathématiques. Nous n'avons pas cherché à la faire mémoriser par les élèves (il est caractéristique du champ des problèmes d'optimisation discrète et ce champ ne relève pas des domaines travaillés à l'école obligatoire).
Le second exemple porte sur des apprentissages géométriques et reprend la situation dite « des solides de Platon ». Il s'agit de déterminer le nombre de polyèdres réguliers ; du matériel de type polydron est mis à disposition. Des travaux antérieurs (Dias,2008 ; Dias, 2009 ; Durand-Guerrier & Dias, 2005) ont utilisé cette situation comme une démarche d'investigation, permettant une dialectique entre objets du monde sensible et objets théoriques, pour permettre des apprentissages géométriques. Mais la production d'une solution raisonnée de ce problème dans le cadre d'une situation forcée construite

avec le cadre de la problématisation permet d'autres apprentissages (Hersant, 2016). En effet, nous avons montré que cette situation pouvait être à l'origine d'un événement de problématisation (Doussot, Hersant, Orange-Ravachol, 2013) significatif d'un déplacement au niveau du registre explicatif : comme le met en évidence l'espace de contraintes la construction des nécessités du problème est étroitement associée à un changement de registre explicatif, et donc à un événement de problématisation. C'est ainsi que nous pensons que cette situation a permis d'initier chez les PE un autre rapport à la géométrie dans l'espace, pas seulement dans la dimension expérimentale qu'elle peut prendre, mais dans le dépassement d'une pensée affine et descriptive de la géométrie vers une pensée euclidienne qui articule nécessairement ses objets premiers (arêtes, faces, sommets) avec des relations métriques. Cela correspond à des apprentissages relatifs aux principes du domaine. Par ailleurs, le travail dans le cadre de l'apprentissage par problématisation permet de considérer le savoir nouveau construit comme un savoir apodictique. Ce point de vue est assez différent de celui de Dias qui considère en effet la propriété « la somme des angles au sommet est de 360° » comme un axiome (Dias, 2008, p. 93) permettant d'obtenir la solution du problème alors que nous la considérons comme une nécessité construite et à construire pour accéder à un savoir problématisé sur le problème.
Ces exemples nous ont permis de mettre en évidence des articulations de savoirs et connaissance de type (b) : les solutions, à proprement parler, de chacun des problèmes constituant des théorèmes et le processus permettant la construction de ces savoirs générant des savoirs relatifs aux principes du domaine (au niveau du REX), susceptibles de modifier fondamentalement le regard porté sur le domaine et les résolutions ultérieures des problèmes du domaine. Par ailleurs, ces deux exemples permettent aussi de montrer comment l'expérience en mathématique peut faire cas et permettre la production de savoirs extraordinaires.

Bibliographie

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problèmes ouverts et situations-problèmes*. Lyon : IREM de Lyon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Lyon 1.

Dias, T. (2009). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. In *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVè école d'été de didactique des mathématiques* (Faïza Chellougui, Catherine-Marie Chiocca, Ghislaine Gueudet, Magali Hersant, André Pressiat, Éric Roditi, Luc Trouche, Fabrice Vandebrouck., p. 43-63). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dias, T., & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, *60*, 78.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Doussot, S., Hersant, M., & Orange-Ravachol. (2013, mai). *Événement de problématisation et dynamiques de problématisation*. Présenté à 11éme colloque du réseau Probléma, Bruxelles.

Hersant, M. (2016). Démarche d'investigation et apprentissages géométriques chez les professeurs des écoles. Problématisation à propos des « solides » de Platon. In *Enjeux et débats en didactique des mathématiques - Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques* (Vol. 2, p. 758-765). Grenoble : La Pensée sauvage éd.

Hersant, Magali. (2010). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* (Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches). Université de Nantes.

Orange, C. (2010). Situations forcées, recherches didactiques et développement du métier enseignant. *Recherches en éducation*, (H.S. 2), 73-85.